

Матем

Интегралы, зависящие от параметра Собственные интегралы, зависящие от параметра

Рассм. $f(x,y)$, оп-но на $\Pi = [a \leq x \leq b] \times [c \leq y \leq d]$ $\forall y \in [c,d] \exists \int_a^b f(x,y) dx = I(y)$

Фун-не св-ва

Тер. 1 Если $f(x,y)$ непрерывна на Π , то $I(y) \in C[c,d]$

Тер. 2 Если $f(x,y) \in C(\Pi)$, то $I(y)$ интегр-а на $[c,d]$ и справед-о раб-во:

$$\int_c^d I(y) dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy \quad (1)$$

Тер. 3 Если $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(\Pi)$, то $I(y)$ диф-на в $\forall y \in [c,d]$ и

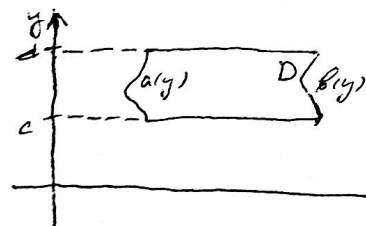
$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx \quad (2)$$

До-во Тер. 1. Рассмотрим $\forall y \in [c,d]$ и $\Delta y = y + \Delta y \in [c,d] \Rightarrow I(y + \Delta y) - I(y) = \int_a^b f(x, y + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx$. Т.к. $f \in C(\Pi)$, то f -р.н. на $\Pi \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta y| < \delta \Rightarrow |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon (b-a) \forall x \in [a,b] \Rightarrow |I(y + \Delta y) - I(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon$

Тер. 2) в силу Т. 1 $I(y)$ непрерывна на $[c,d]$. Раб-во (1) следует из того, что интеграл и двойное интеграл (как повторные интегралы) равны $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y) dy$

Тер. 3) Пусть $g(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx$, которая (Тер. 1) непрерывна на $[c,d]$. Пусть $y \in [c,d]$:
 $\int_c^y g(t) dt = \int_c^y \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,t) dx dt = \int_a^b dx \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t) dt = \int_a^b f(x,t) \Big|_{t=c}^{t=y} dx = \int_a^b f(x,y) dx - \int_a^b f(x,c) dx \Rightarrow$
 $\Rightarrow \int_c^y g(t) dt = I(y) - I(c) \Rightarrow I(y)$ - диф-на фун-я $\Rightarrow I'(y) = g(y)$

Общий собственный интеграл, зависящий от параметра



$f(x,y)$ определена на мн-ве $\{c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\} \equiv D$

Рассм-м ситуацию, когда $\forall y \in [c,d]$ определен интеграл: $I(y) \equiv \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y) dx$

Тер. 4 Пусть: 1) $f(x,y) \in C(\Pi)$, $D \subset \Pi$ - область-к
2) $a(y), b(y) \in C([c,d])$
3) $I(y) \in C([c,d])$

Тер. 5 Пусть: 1) $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \in C(\Pi)$ ($D \subset \Pi$)
2) $a(y), b(y)$ диф-на в $\forall y \in [c,d]$
3) $I(y)$ диф-на в $\forall y \in [c,d]$
4) $I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dx + f(b(y),y) b'(y) - f(a(y),y) a'(y) \quad (3)$

5) Запр-тб Прп: $\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial p} (e^{-x} x^p) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x dx$. $e^{-x} x^{p-1} \ln x \leq e^{-x} x^{p-1} \ln x = e^{-\frac{1}{2}} \frac{x^{p-1} \ln x}{e^{\frac{1}{2}}} \leq e^{-\frac{1}{2}} x^{p-1}$, $x > 1$.

Теор. 4) Используем след-е теор. 4: $(\forall y_0 \in [c; d])$

$$\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0) dx + \int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx - \int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y) dx \quad (4)$$

Т.к. $f \in C([c; d])$ непрерывна на $[c; d]$, $|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y) dx| \leq \max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| \cdot |\int_{b(y_0)}^{b(y)} dx| = M_0 |b(y) - b(y_0)| < \varepsilon$, если выбрать $\delta > 0: |y - y_0| < \delta$ (непр. $b(y)$), аналогично где $a(y)$.

Теор. 5) а) теорема (4): первое слагаемое: $\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dy = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ (в том месте $y = y_0$)
 где $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны. Пусть $y = y_0$ $\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$. $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{\varphi(y) - \varphi(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{y - y_0} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$. Это можно записать так:
 $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = f(y_0, y_0) (b(y_0) - a(y_0))$.
 $\frac{1}{y - y_0} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = \frac{f(y_0, y_0) (b(y) - a(y))}{y - y_0} \rightarrow f(b(y_0), y_0) - f(a(y_0), y_0)$
 т.к. $b(y) \rightarrow b(y_0)$ и $a(y) \rightarrow a(y_0)$ при $y \rightarrow y_0$.

Значит Теор. 4 и 5 верны и тогда, когда $f(x, y)$ непрерывна только в D .

Необходимость интегрирования по параметру

Рассм. $f(x, y)$, непрерывна на $[a \leq x < \infty) \times [c \leq y \leq d]$. Пусть $\forall y \in [c; d] \exists \int_a^\infty f(x, y) dx = I(y)$

Пример $\int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x} dx = I(y)$.

- 1) $\frac{\sin(xy)}{x} \equiv f(x, y)$ непрерывна на $[0 < x < \infty) \times [c \leq y \leq d]$, $y=0: I(y)=0$
- 2) $I(y) \neq 0$ эк. $y=0: I(y)=0$; $y \neq 0$ - произв. Эксп. - Аделет
- 3) Пусть $y > 0$, $x \rightarrow t = xy \Rightarrow I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \frac{dt}{y} = \frac{1}{y} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt > 0$;
 $y < 0$, $x \rightarrow t = xy \Rightarrow I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \frac{dt}{y} = -\frac{1}{y} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ (в аналогичном значении)
 $I(y) = C \sin y$ - разность произв. ($C > 0$)

Понятие р.к. необход. интегр.

Опр Интеграл $I(y)$ наз-ся р.к. на мн-ве $Y \subset [c; d]$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall R > A \forall y \in Y: |\int_A^R f(x, y) dx| < \varepsilon$

Теор. 6 (кр. Коши) $I(y)$ р.к. на $Y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A > a: \forall R_1, R_2 > A \forall y \in Y: |\int_{R_1}^{R_2} f(x, y) dx| < \varepsilon$

Теор. 2 (кр. Вейерштрасса) Пусть 1) $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ $\forall y \in Y, \forall x > a$
 2) $\int_a^\infty g(x) dx$ эк. на Y
 3) $I(y)$ эк. на Y

а) $|\int_{R_1}^{R_2} f(x, y) dx| \leq \int_{R_1}^{R_2} |f(x, y)| dx \leq \int_{R_1}^{R_2} g(x) dx$
 $\forall y \in Y \Rightarrow \int_a^\infty g(x) dx < \varepsilon$ т.к. $\int_a^\infty g(x) dx$ эк. (кр. Коши)

Теор. 8 (кр. Дирхле-Абеля) Пусть 1) $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) g(x, y) dx, \forall y \in Y$
 2) $\int_a^\infty f(x, y) dx$ эк. на Y и $g \in Y$ (равн.), $Y \in X$
 3) $g(x, y)$ монот. на $a \leq x < \infty$ для каждого $y \in Y$ ($g(x, y) \geq 0$)
 4) $g(x, y) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ равн. на Y
 5) $I(y)$ эк. на Y .

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall x > \delta \Rightarrow |g(x,y)| < \varepsilon, \text{ п.н.} \Rightarrow \forall y \in Y \text{ (одно и то же } \delta(x,y))$

$$\int_{R_1}^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx \stackrel{\text{I.T.}}{\leq} \int_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx + g(R_2y) \int_{R_2}^{\infty} f(x,y)dx \quad \forall y \in (R_1, R_2)$$

$$\left| \int_{R_1}^{\infty} f(x,y)g(x,y)dx \right| \leq \underbrace{|g(R_1y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2M_1}} \cdot \underbrace{\left| \int_{R_1}^{\infty} f(x,y)dx \right|}_{\leq M_1} + \underbrace{|g(R_2y)|}_{< \frac{\varepsilon}{2M_2}} \cdot \underbrace{\left| \int_{R_2}^{\infty} f(x,y)dx \right|}_{\leq M_2} \quad \forall y \in Y. \blacktriangle$$

Пример $\int_1^{\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx, y \in [c,d], c > 0.$

1) $|\sin(yx)| = 1 - \frac{1}{y} \cos(yx) < \frac{1}{c}$, 2) $g(x,y) = \frac{1}{x} \searrow 0 \quad \forall y \in Y, \frac{1}{x} \searrow 0 \text{ как } x \rightarrow \infty \Rightarrow \text{п.н.}$

Пр. 9 (применение Дини) Пусть: 1) $I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx, y \in [c,d]$
 2) $f(x,y)$ непрерыв. на $[x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$
 3) $f(x,y) \geq 0$ на —
 4) $I(y)$ непрерыв. на $[c,d]$, то $I(y)$ с.п.н. на $[c,d]$.
 5) с.п.н. на $[c,d]$.

$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx$, с.п.н.: 1) $I_n(y)$ непрерыв. на $[c,d]$ } из Дини $\{I_n(y)\} \Rightarrow I(y)$ на $[c,d]$
 2) $I_{n+1}(y) \geq I_n(y) \quad \forall y \in [c,d]$
 3) $I_n(y) \rightarrow I(y)$ — непрерыв. на $[c,d]$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N: |I_n(y) - I(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in [c,d], \left| \int_a^{a+n} f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \int_a^{\infty} f(x,y)dx < \varepsilon$
 По теореме $R \geq a+n \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x,y)dx < \varepsilon \quad \forall y \in [c,d] \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ с.п.н. на $[c,d]$. $\blacktriangle$

Замечание Если $\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ с.п.н. на Y , то $\int_a^{\infty} f(x,y)dx \equiv I_n(y)$ с.п.н. на Y .

Формулы Абеля и Дини
для пределов с переменным пределом

Пр. 10 Пусть: 1) $f(x,y)$ непрерыв. на $[x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$
 2) $I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ с.п.н. на $[c,d]$
 3) $I(y)$ непрерыв. функции на $[c,d]$.

$I_n(y) = \int_a^{a+n} f(x,y)dx$ — непрерыв. ф-ция (как сдвиг или сдвиг непрерыв. ф.), $I_n(y) \geq I(y)$ на $[c,d] \Rightarrow$ 'х

Замечание Если y_0 — л.п. предела, то справедливы равенства $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0) = \int_a^{\infty} f(x,y_0)dx$
 $= \int_a^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)dx, y_0 \in [c,d]$.

Пр. 11 Пусть: 1) $f(x,y), \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ непрерыв. на $[x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$
 2) $I(y)$ с.п.н. или в точке $y_0 \in [c,d]$
 3) $\int_a^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$ с.п.н. на $[c,d]$.
 4) $I(y)$ дифференцируема в $\forall T \in (c,d)$ и $I'(y) = \int_a^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$

Аналогично получим $I_n(y)$ — дифференцируема $\forall T \in (c,d)$ и непрерыв., $I_n'(y) = \int_a^{a+n} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx$ (по теореме о дифференцировании под знаком интеграла)
 $\{I_n'(y)\}$ имеет предел хотя бы в одной точке $y_0 \in [c,d]$.
 $\{I_n(y)\} \Rightarrow$ на $[c,d]$.
 Из 7.0 дифференцируем формулу.
 Получим 0.

5) Проверка Пр: $\int_a^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} (e^{-x} x^p) dx = \int_a^{\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x dx, e^{-x} x^{p-1} \ln x \leq e^{-x} x^{p-1} \ln x = e^{-\frac{x}{2}} \frac{x^{p-1} \ln x}{e^{x/2}} \leq e^{-\frac{x}{2}}, x > 1.$

Тез. 12 Пусть: 1) Вспомогательная лемма 7.10

а) $I(y)$ инт. на $[c, d]$ и $\int_c^d I(y) dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ (*)

4) Касательно непрерывности пр. равенства к значению $\int_c^d I(y) dy$, рассм. $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ ($\forall R > a$)
 $\forall \varepsilon > 0 \exists R_0 \geq a : \forall R > R_0 \quad \left| \int_c^d I(y) dy - \int_a^R \int_c^d f(x, y) dy dx \right| < \varepsilon$?

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^R f(x, y) dx + \int_R^d f(x, y) dx \right) dy = \underbrace{\int_a^R \int_c^d f(x, y) dx dy}_{\text{по (*)}} + \underbrace{\int_c^d \int_R^d f(x, y) dx dy}_{\text{остаток 7.12}}$$

(2): $\forall \varepsilon > 0 \exists R_0 \geq a \forall R > R_0 \quad \forall y \in [c, d] \quad \left| \int_R^d f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{d-c}$ интеграл по $[c, d]$ по y

Тез. 13 Пусть:

1) $f(x, y)$ непр. на $[x \geq a] \times [c \leq y \leq d]$

2) $f(x, y) \geq 0$ на —

3) $I(y)$ непрерыв. на $[c, d]$

а) с.т. $\int_c^d I(y) dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$

4) По пр. 2.10 (7.3) $I(y)$ пр. инт. на $[c, d] \Rightarrow$ 7.12

Тез. 14 Пусть:

1) $f(x, y)$ непр.-но, ≥ 0 , непрерыв. на $[x \geq a] \times [y \geq c]$

2) $\int_a^x f(x, y) dx$, $\int_c^y f(x, y) dy$ с.т. и непр. на инт-ах $[y \geq c]$ и $[x \geq a]$ соответственно.

а) Из с.т. одного из повторных интегр. $\int_c^y I(y) dy$, $\int_a^x K(x) dx$ следует с.т. другого и их равенство между собой.

4) Пусть с.т. $\int_c^y I(y) dy$. Докажем, что $\int_a^x K(x) dx$ с.т. и он равен количеству $\int_c^y I(y) dy$.

? $\forall \varepsilon > 0 \exists R_0 \geq a \forall R > R_0 : \left| \int_a^R K(x) dx - \int_c^R I(y) dy \right| < \varepsilon$. $\int_a^R K(x) dx = \int_a^R \int_c^x f(x, y) dy dx = \int_c^R \int_a^x f(x, y) dx dy$

Рассм. $\int_c^y I(y) dy - \int_a^x K(x) dx = \int_c^y \int_a^y f(x, y) dx dy - \int_a^x \int_c^x f(x, y) dy dx = \int_c^y \int_c^x f(x, y) dx dy \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

а) $\int_a^x \int_c^y f(x, y) dx dy + \int_c^y \int_a^x f(x, y) dx dy$. Т.к. $\int_c^y I(y) dy$ с.т., то $\forall \varepsilon > 0 \exists R_0 > c \forall R > R_0 : \left| \int_a^R \int_c^R f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon$

$\Rightarrow 0 \leq \int_a^R \int_c^R f(x, y) dx dy < \varepsilon \Rightarrow \int_a^R \int_c^R f(x, y) dx dy < \varepsilon \quad \forall R > a$

Указ, что $\varepsilon > 0$, второе счел. ≥ 0 и $< \varepsilon$. Т.к. $\int_a^x f(x, y) dx$ с.т.-равн. на $[c, c]$ инт-дально, то

$\forall \varepsilon > 0 \exists R_0 \geq a : \forall R > R_0 \quad \int_a^R f(x, y) dx < \frac{\varepsilon}{R_0 - c} \quad \forall y \in [c, R_0]$

§3. Примеры непрерывности результатов повтор. инт. зависящих от параметров

1° Интегрирование инт-на Дирихле $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, рассм. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \equiv I(\alpha)$ с.т. $\forall \alpha \geq 0$

$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx$ по формуле $= \frac{e^{-\alpha x} (\cos x + \alpha \sin x)}{1 + \alpha^2}$. $|\alpha \sin x + \cos x| = \sqrt{1 + \alpha^2} |\sin(x + \varphi)| \leq \sqrt{1 + \alpha^2}$

$\Rightarrow |I(\alpha)| \leq \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{(\alpha^2 + 1)^2} = \frac{1}{\alpha^2 + 1} \leq 1$. Докажем, что $I(\alpha)$ сходя-ся рн. на $\alpha \geq 0$

$$\int_R e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = \int_R \frac{1}{x} d\Phi(x, x) = \frac{\Phi(x, x)}{x} \Big|_R + \int_R \Phi(x, x) \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\Phi(R, x)}{R} + \int_R \frac{\Phi(x, x)}{x^2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_R e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{|\Phi(R, x)|}{R} + \int_R \frac{|\Phi(x, x)|}{x^2} dx \leq \frac{1}{R} + \int_R \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{R} \quad (R \geq 1)$$

Из т.о непрерывности интеграла Бопля: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int(x) = \int_0^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Рассм. $\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} (e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}) dx = \int_0^{\infty} (-x) e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx = -\Phi(x, \alpha) \Big|_{x=0}^{+\infty} = -(0 + \frac{1}{\alpha^2 + 1}) = -\frac{1}{\alpha^2 + 1}$

Покажем, что интеграл сх. равен. Умножив значением параметра вида $0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$

$\Rightarrow |e^{-\alpha x} \sin x| \leq e^{-\alpha_0 x}$, $\int_0^{\infty} e^{-\alpha_0 x} dx$ сх. Поэтому т.т. интеграл $0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$ сходливо

реш-ть: $\frac{d}{d\alpha} \int(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} (e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x}) dx = -\frac{1}{\alpha^2 + 1}$. Т.о. $\forall \alpha > 0 \quad \int'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow \int(\alpha) = -\arctan \alpha + C$.
 В силу непрерывности $\int(\alpha)$ на $[0, +\infty)$ сходливо равен-во выполн $\forall \alpha > 0$. Полагая $\alpha \rightarrow +\infty$ получим $\int(\alpha) \rightarrow 0$.
 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int(\alpha) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow \int(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

2°. Подписание интеграла Льюиса

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ Докажем эту сторону, используя интегр. Бопля.

2) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I$, 1) Из интеграла I заменим x на ty : $x = ty$, $y > 0$, $y \in \mathbb{R}$ - параметр
 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} y dt$. 2) $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} dy = I^2$

3) Рассм. подт. интегр. $\int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} y dt) e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} y e^{-(1+t^2)y^2} dy) dt = \int_0^{+\infty} (\int_0^{+\infty} y e^{-y^2(1+t^2)} dy) dt =$
 $= \int_0^{+\infty} (\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2(1+t^2)} d(y^2)) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

4) $\oint$: $f(y, t) = y e^{-(1+t^2)y^2}$ - непрерыв. и нестр., $\int_0^{+\infty} f(y, t) dy = \frac{1}{2(1+t^2)}$ - непрерыв. на $[0, +\infty)$, $\int_0^{+\infty} f(y, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{4}$ - непрерыв. на $[0, +\infty)$

Применяем 7.14.

§4. Интеграл Эйлера

$f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! x^{k-1}}{x(x+1) \dots (x+k-1)}$ $\forall x > 0$: $f_k(x) = x!$, $x \in \mathbb{N}$ $\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx$, $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$

1° Область сходимости: $\Gamma(p) = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$, $e^{-x} x^{p-1} = e^{-\frac{x}{2}} \frac{x^{p-1}}{e^{\frac{x}{2}}} \leq C e^{-\frac{x}{2}} \Rightarrow \forall p$: интегр. сх.
 $\frac{1}{2} x^{p-1} \leq x^{p-1} \Rightarrow p-1 > -1$, то сх.
 $p \leq 0$, то расх.
ОДЗ: $p > 0$

$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_1^{\infty} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$, x^{p-1} - стр. в 2-м интеграле, $\Rightarrow$ сх. $\Rightarrow q > 0$.

$0 < x^{p-1} \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq C x^{p-1} \sim \int_0^1 x^{p-1} dx$ сх. $\Rightarrow p > 0$

ОДЗ: $(p > 0, q > 0)$

2° Продолжение на ОДЗ: а) Непрер. $\Gamma(p)$, решим. $0 < p \leq p \leq p_1 < \infty$ и правая конеч. p_1
 Покажем, что здесь $\Gamma(p)$ ин. равномерно.

$\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx \leq \int_0^1 1 \cdot x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$ $\Rightarrow \Gamma(p) \leq \frac{1}{p}$
 $\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx \leq \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx = \frac{1}{p}$ $\Rightarrow \Gamma(p) \leq \frac{1}{p}$
ОДЗ: $(p, p_1) \Rightarrow p > 0$

б) Дифференцируем $\Gamma(p)$: $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial p} (e^{-x} x^{p-1}) dx = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} \ln x dx$, $e^{-x} x^{p-1} \ln x \leq e^{-x} x^{p-1} \ln x = e^{-\frac{x}{2}} \frac{x^{p-1} \ln x}{e^{\frac{x}{2}}} \leq C e^{-\frac{x}{2}}$, $x > 1$.

$$|e^{-x} x^{p-1} \ln x| = e^{-x} x^{p-1} \ln \frac{1}{x} \leq x^{p-1} \ln \frac{1}{x} = x^{p-1} \cdot x^{\frac{p}{2}-1} \cdot x^{\frac{p}{2}-1} \ln \frac{1}{x} \leq C x^{\frac{p}{2}-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} (-) dx \text{ равн. } 0 < p_0 \leq p \leq p_1 < \infty$$

16

$$\Rightarrow \Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} \ln x dx \quad \forall p > 0$$

в силу р.и.х. и непрерывности. ф. $\Rightarrow \Gamma'(p)$ непрерывна на интервале $p > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} (e^{-x} x^{p-1}) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} (\ln x) dx. \text{ Аналог. рассужд. } \Rightarrow \text{функция } \Gamma \text{ имеет кр. максимум на } (0, \infty).$$

$$\text{3) Исследуем } \Gamma(p) \text{ в окрестности } p=1. \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx = - \int_0^{+\infty} x^{n-1} d e^{-x} = -x^{n-1} e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + (n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx = (n-1) \Gamma(n-1), n \geq 2$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

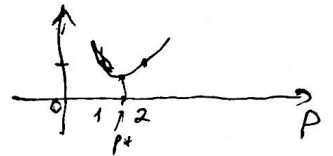
$$\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^2 e^{-x} x^{p-1} dx \Rightarrow \Gamma''(p) > 0 \Rightarrow \Gamma(p) \text{ выпуклая вниз, } \Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$$

$$\Rightarrow \exists! p^* \in (1, 2) : \Gamma(p^*) = \min_{1 \leq p \leq 2} \Gamma(p). \text{ Поведение при } p \rightarrow 0^+,$$

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \sim \frac{1}{p}$$

Поведение на $+\infty$: $\Gamma(p) \nearrow$, т.к. $\Gamma(p)$ выпукл. вниз, то $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Gamma(p) = +\infty$

$$\text{Каска. асимпт.: } \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(p)}{p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{p+1} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{p \cdot \Gamma(p)}{p+1} = +\infty$$



4° Формулы для $B(p, q)$:

$$a) B(p, q) = B(q, p), \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = B(q, p)$$

$$b) \text{ Форм-лы связывания: } B(p+1, q) \text{ и } B(p, q+1) \text{ с } B(p, q), B(p+1, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^{q-1} dt = -\frac{1}{q} \int_0^1 t^p d(1-t)^q =$$

$$= -\frac{1}{q} t^p (1-t)^q \Big|_0^1 + \frac{1}{q} \int_0^1 (1-t) t^p t^{q-1} dt = \frac{p}{q} \int_0^1 (1-t) t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \in \frac{d(-\frac{1}{q} (1-t)^q)}{dt} \otimes \frac{1}{q} \int_0^1 (1-t) t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \otimes$$

$$B(p, q) \Rightarrow \frac{p}{q} \int_0^1 (1-t) t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt \Rightarrow B(p+1, q) = \frac{p}{q} B(p, q) - \frac{p}{q} B(p+1, q),$$

$$(1 + \frac{p}{q}) B(p+1, q) = \frac{p}{q} B(p, q), B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$$

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q) \text{ (из симметрии. следует)}$$

5° Вычисление интеграла

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Рассм. $I(D) = \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy, D = \{x, y : x > 0, y > 0\}$ $I(D)$ - несобст. ф.к!

т.к. $f(x, y) > 0 \Rightarrow$ кх. $I(D) \Leftrightarrow$ предел $I(D_n)$ хотя бы для одной послед. областей D_n и их. мер. D . Пусть $D_n = \{x, y : \frac{1}{n} \leq x \leq n, \frac{1}{n} \leq y \leq n\}$

$$I(D_n) = \iint_{D_n} x^{p-1} y^{q-1} e^{-x-y} dx dy = \int_{\frac{1}{n}}^n x^{p-1} e^{-x} dx \int_{\frac{1}{n}}^n y^{q-1} e^{-y} dy \Rightarrow I(D_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = I(D).$$

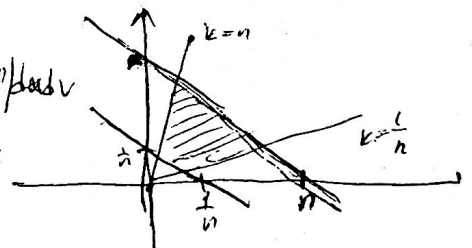
$$\text{Рассм. } D_n' \subset D : D_n' = \{x, y : \frac{1}{n} \leq x+y \leq n, \frac{1}{n} \leq \frac{x}{y} \leq n\}$$

$$\Rightarrow I(D_n') \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I(D) = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q), \text{ пусть } \begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = uv \\ x = u(1-v) \end{cases}, dxdy = |\frac{D(x,y)}{D(u,v)}| du dv$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u, \Rightarrow I(D_n') = \iint_{D_n'} u^{p-1} (1-v)^{p-1} u^{q-1} v^{q-1} e^{-u} u du dv$$

$$\frac{1}{n} \leq u \leq n, \frac{1}{1+v} \leq v \leq \frac{n}{1+v}$$

$$\Rightarrow I(D_n') = \int_{\frac{1}{n}}^n u^{p+q-1} e^{-u} du \int_{\frac{1}{1+v}}^{\frac{n}{1+v}} (1-v)^{p-1} v^{q-1} dv \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(p+q) \cdot B(p, q) = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q)$$



Менее узко:
 $D_n \subset D_{n+1} \forall n,$
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$

Из этой групп-ки следует:

1) $B(p, q)$ непрерывна по $p, q > 0$ (отсюда непрерывность ф.)

2) $B(p, q)$ имеет абсолютный минимум по p, q на любом отрезке $p > 0, q > 0$ (отсюда непрерывность ф.)

$$\text{Известно: } \int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} \varphi \cos^{q-1} \varphi d\varphi = \frac{1}{n} \left| \begin{matrix} x = \sin^2 \varphi, \cos \varphi = \sqrt{1-x} \\ \sin \varphi = x^{1/2}, dx = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \end{matrix} \right| = \int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1} (1-x)^{\frac{q}{2}-1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{p}{2}-1} (1-x)^{\frac{q}{2}-1} dx$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Пример 2 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

§5. Показательная функция

$n! \ll n^k \ll e^{\delta n} \ll n!$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $n! \sim \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$, $n \rightarrow \infty$, $n! = \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n (1 + O(1/n))$ — формула Стирлинга

$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$, расм. это же $\forall n > 0$, $\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} \lambda t^{\lambda-1} e^{-t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t} dt = \lambda \Gamma(\lambda)$

① $\lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_0^{\infty} (t/\lambda)^{\lambda} e^{-t/\lambda} dt \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x - \ln(x+1))} dx = \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{x+1} dx$ Метод Лапласа $\int_{-a}^a e^{-\lambda^2 t^2} f(t) dt$ Значит

Пусть $f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + O(t^{n+1})$

$\int_{-a}^a e^{-\lambda^2 t^2} f(t) dt = \int_{-a}^a e^{-\lambda^2 t^2} (c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots) dt = c_0 \int_{-a}^a e^{-\lambda^2 t^2} dt + c_2 \int_{-a}^a e^{-\lambda^2 t^2} t^2 dt + \dots$

$\int_{-a}^a e^{-\lambda^2 t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 t^2} dt - \int_{|t|>a} e^{-\lambda^2 t^2} dt \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} - O(e^{-\lambda^2 a^2})$, $\Gamma(\lambda+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\lambda} dt$, $t = \lambda(x+1)$, $\Gamma(\lambda+1) = \lambda^{\lambda+1} e^{-\lambda} \int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(x - \ln(x+1))}}{x+1} dx$

показательные $f(t)$ при $t \rightarrow 0$, можно возвести показатель этого инт-ла при $\lambda \rightarrow \infty$.

$\psi(x) = x - \ln(x+1)$, $x > -1$; $\psi'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$, $x > 0$ — т. мин.

$\Rightarrow \psi(x) > 0 = \psi(0)$, $\psi(x) \in C^{\infty}(-1, \infty)$; $\psi''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$

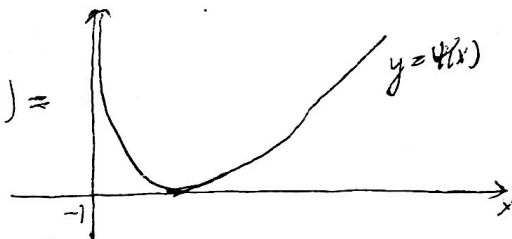
$y = \ln x \sqrt{x - \ln(x+1)}$, $|x \rightarrow 0: -\ln(x+1) + x = x - (-\frac{x^2}{2} + x + \frac{x^3}{3} - \dots) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$
 $\Rightarrow \sqrt{x - \ln(x+1)} = \sqrt{\frac{x^2}{2} h(x)} = |x| \sqrt{\frac{1}{2} h(x)}$

$\Rightarrow y = \ln x \cdot |x| \sqrt{\frac{1}{2} h(x)} = x \sqrt{\frac{1}{2} h(x)}$, $h(0) = \frac{1}{2} \neq 0$

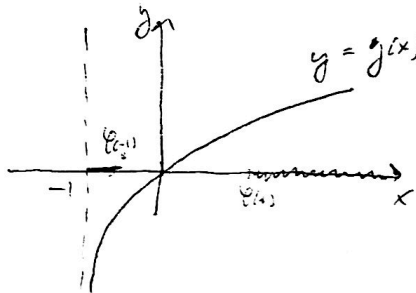
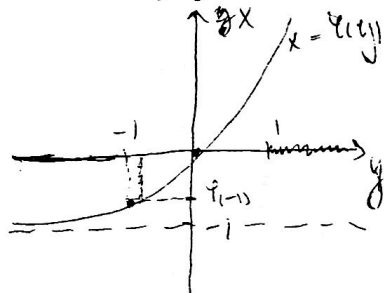
$\Rightarrow$ предп. замена координат, при $x \rightarrow 0$ $g(x) = x \sqrt{\frac{1}{2} h(x)}$, монот.

возр. и убыв. граница $h(x)$ на $(-1, \infty)$

пр-ва $x = \psi(y) \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \Rightarrow dx = \psi'(y) dy$



$\Rightarrow$ где $y = g(x)$ $\exists$ обратная ψ -ко $x = \psi(y) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$
 $dx = \psi'(y) dy$



$\int_{-1}^{\infty} e^{-\lambda(x - \ln(x+1))} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda g^2(y)} \psi'(y) dy = \int_{-1}^0 e^{-\lambda g^2(y)} \psi'(y) dy + \int_0^{\infty} e^{-\lambda g^2(y)} \psi'(y) dy$

$I_2 = \int_{-1}^0 e^{-\lambda g^2(y)} \psi'(y) dy \leq \int_{-1}^0 e^{-\lambda} dy \leq e^{-\lambda}$

I_3 убывает при $\lambda \rightarrow \infty$ экспоненц.

$I_3 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda g^2(y)} \psi'(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-1)g^2(y)} e^{-g^2(y)} \psi'(y) dy \leq e^{-(\lambda-1)} \int_0^{\infty} e^{-g^2(y)} \psi'(y) dy = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(x - \ln(x+1))} dx$ так.

$\Rightarrow I_2, I_3$ убывают экспоненциально, $I_2 = O(e^{-\lambda})$, $I_3 = O(e^{-\lambda})$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Лемма $\exists$ $D(y)$ монот. на $[-a, a]$ ($a > 0$)

2) $f(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \dots + c_{2n-1} y^{2n-1} + O(y^{2n})$

① $\int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} f(y) dy = c_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\lambda}} + c_2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{3/2}} + \dots + c_{2n-2} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\lambda^{n-\frac{1}{2}}} + O(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}})$, $\lambda \rightarrow \infty$.

$$\int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} (c_0 + \dots + c_{2n-1} y^{2n-1} + O(y^{2n})) dy = c_0 \int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} dy + c_2 \int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} y^2 dy + \dots + c_{2n-2} \int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} y^{2n-2} dy + O(n) \int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} y^{2n} dy.$$

$$\int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} y^{2k} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2} y^{2k} dy - \int_{|y|>a} e^{-\lambda y^2} y^{2k} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-\epsilon^2)\lambda y^2} y^{2k} dy - \int_{|y|>a} e^{-\lambda y^2} y^{2k} dy.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2} y^{2k} dy = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\lambda^{k+\frac{1}{2}}}.$$

$$\int_{|y|>a} e^{-\lambda y^2} y^{2k} dy = O(e^{-\lambda a^2}).$$

$$\int_{-a}^a e^{-\lambda y^2} (\dots) dy = c_0 \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + O(e^{-\lambda a^2}) \right] + c_2 \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + O(e^{-\lambda a^2}) \right] + \dots + c_{2n-2} \left[\frac{\Gamma(n-\frac{1}{2})}{\lambda^{n-\frac{1}{2}}} + O(e^{-\lambda a^2}) \right] + O(n) \left[\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}} + O(e^{-\lambda a^2}) \right] = 1 + O(e^{-\lambda a^2}) + O(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}}).$$

$$= O(\frac{1}{\lambda^{n+\frac{1}{2}}})$$

$$\int_{-1}^1 e^{-\lambda y^2} \varphi'(y) dy, \quad \varphi(y) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} y + \frac{\varphi''(0)}{2!} y^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!} y^3 + O(y^4), \quad g^2(x) = x - \ln(x+1)$$

$$2g(x)g'(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow 2g'(x) = \frac{\varphi(y)}{\varphi(y)+1} \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{1}{g'(x)} = 2y \frac{\varphi(y)+1}{\varphi(y)} \Rightarrow \varphi(y)\varphi'(y) = 2y\varphi(y) + 2y$$

$$\varphi'(0) + \varphi(0) + \varphi(y)\varphi'(y) = 2y\varphi(y) + 2y \Rightarrow \varphi'(0) = 2 \Rightarrow \varphi(0) = \sqrt{2}. \quad (\varphi(0) = 0 \text{ no } \varphi'(0) = 0)$$

$$\varphi''\varphi' + \varphi'\varphi'' + \varphi'\varphi'' + \varphi'\varphi'' = 2\varphi' + 2\varphi' + 2y\varphi'' \Rightarrow 3\varphi''\varphi' + \varphi\varphi''' = 4\varphi' + 2y\varphi'' \mid y=0 \Rightarrow 3\varphi(0)\varphi''(0) = 4\varphi'(0) \Rightarrow \varphi''(0) = \frac{4}{3}.$$

$$g''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow \varphi'''(0) = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow c_0 = \sqrt{2}, c_2 = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{-\lambda y^2} \varphi'(y) dy = \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{2\pi}}{12} \cdot \frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}) \cdot \Gamma(\lambda+1) = e^{-\lambda} \lambda^{\lambda} \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda} + \frac{\sqrt{2\pi}}{12\lambda^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{5}{2}}}) + O(e^{-\lambda}) \right] = \lambda^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-\lambda} \sqrt{2\pi} \left[1 + \frac{1}{12\lambda} + O(\frac{1}{\lambda^2}) \right],$$

$$\lambda = n \Rightarrow n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + O(\frac{1}{n}) \right].$$